ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

Н.Н. Кирилюк, *учитель математики, высшей категории,*
г. Аксай, Ростовской области.

Задачи с параметрами в школьном курсе алгебры обычного ученика повергают в полное уныние. Одно только определение параметра («параметр есть фиксированное, но неизвестное число») вызывает, по меньшей мере, два вопроса:

1. Как можно зафиксировать неизвестное нам число?

2. Если число все же зафиксировано, то, значит, оно известно?

Чаще всего, эта неразбериха так и присутствует в головах наших учеников, преследуя их с 6-7 класса и до окончания школы. И никакие зубрежки, никакие усиленные курсы или индивидуальные занятия не гарантируют, что ребенок усвоит этот материал, так как никаких алгоритмов решения задач с параметрами нет.

Что же, это тупик? Но ведь есть же дети (очень малая часть от общего числа учащихся), с легкостью решающие задачи с параметрами. Наверное, разгадка их успехов кроется в особой системе, в которой этим ученикам предлагалось изучение темы «Параметры». Все те же основные принципы дидактики: доступность (с 6 класса, а лучше – со 2-го), логичность, последовательность, движение от простого к сложному, наглядность, научность – позволяют учителю и его ученикам достичь стабильно высоких результатов в решении уравнений и неравенств с параметрами.

Безусловно, мы говорим о классах, где учебный план даёт возможность учителю работать не только на троечника, а уделять серьезное внимание развитию творческой и познавательной активности детей, мотивированных на изучение математики. Предпрофильные и профильные классы, классы с углубленным изучением математики – вот поле для активной работы учителя. А если класс общеобразовательный, 2-3 урока алгебры в неделю и при этом есть в классе группа детей, одолевающих учителя вопросами: «А вы научите нас решать задачи с параметрами?»? В этой ситуации мне видится только один выход: дополнительный курс математики (не менее 2-х часов в неделю) с хорошо продуманной программой, учитывающей индивидуальные особенности и запросы учащихся.

В своей работе я хочу предложить вашему вниманию один из возможных вариантов изложения материала спецкурса по алгебре и началам анализа(10 класс), дающего неплохие результаты при изучении темы «Уравнения и неравенства с параметрами».

Обычно мы начинаем с повторения свойств и графиков ранее изученных функций ($y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$) И первым моментом «прозрения» для моих учеников становятся задачи о расположении корней квадратного трёхчлена, а «волшебным ключиком» к решению таких задач является график квадратичной функции.

Графическая иллюстрация к задаче снимала все вопросы, возникающие при первом беглом прочтении условия. Затем были многочисленные задачи из совсем иных, на первый взгляд, разделов элементарной математики (исследование экстремальных свойств функций, иррациональные, тригонометрические, показательные логарифмические уравнения, системы уравнений и неравенств и т. д.). Зачастую многие из них, в конечном итоге, сводились к решению квадратных уравнений или к исследованию квадратного трёхчлена. И дети верят словам учителя о том, что маленькое «белое пятнышко» в темах «Квадратный трёхчлен» и «Квадратичная функция» может привести к появлению «мёртвых зон» и провалов в наших знаниях элементарной математики. Я и сама полностью согласна с утверждением преподавателей мехмата МГУ О. Черкасова и А. Якушева: «Во многих (и вы еще убедитесь этом!) так называемых задачах повышенной трудности “торчат уши” квадратного трёхчлена».

Задачи о расположении корней квадратного трехчлена

Квадратный трехчлен вполне можно назвать главной функцией всей школьной математики. Безукоризненное знание необходимых свойств квадратного трехчлена требуется от каждого учащегося. Задачи, связанные с расположением корней квадратного трехчлена, занимают особое положение на выпускных и вступительных экзаменах.

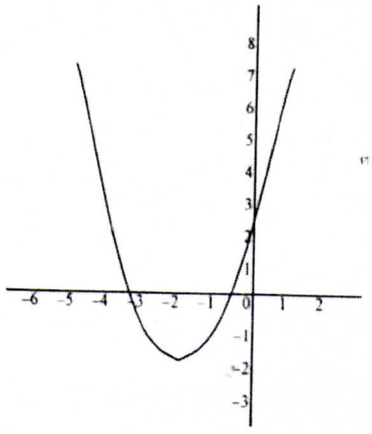
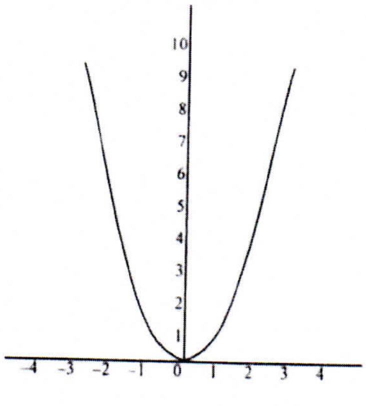
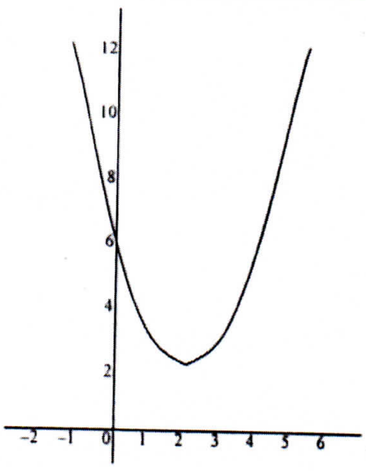
Квадратичная функция, ее свойства и график

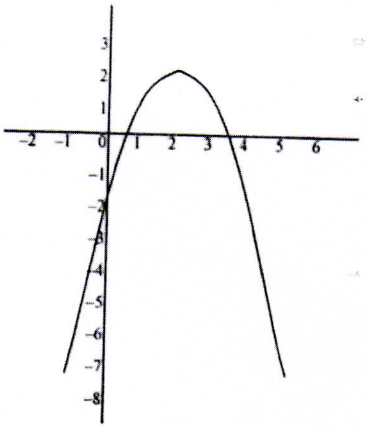
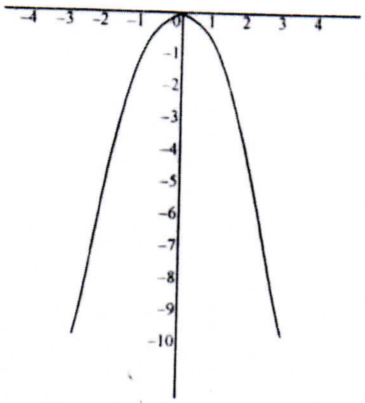
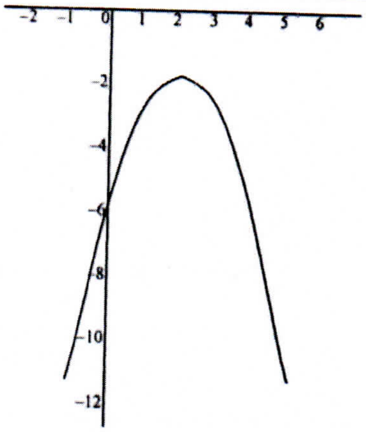
Определение: Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – числа, $a \neq 0$, называется квадратичной. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх при $a > 0$; при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз.

1. $D(y) = R$
2. $y(-x) = ax^2 - bx + c$ – функция не является ни четной, ни нечетной
3. Периода не имеет.
4. Нули функции: $y = 0$; $ax^2 + bx + c = 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант.

Рассмотрим таблицу:

$D > 0$ **(2 различных корня)**	**$D = 0$** **(один корень)**	**$D < 0$** **(нет корней)**
 $y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$; $y > 0$ при	 $y < 0$ нет корней; $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	 $y < 0$ нет решений;

<table>
<tr><td>$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$</td><td></td><td>$y > 0$ при любом $x \in R$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Функция убывает при $x \in (-\infty; x_0]$
Функция возрастает при $x \in [x_0; +\infty)$
$E(y) = [y_0; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>
$y < 0$ при
$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;
$y > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$</td><td>
$y < 0$ при
$x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$</td><td>
$y < 0$ при любом $x \in R$;
$y > 0$ нет решений</td></tr>
<tr><td colspan="3">Функция убывает при $x \in [x_0; +\infty)$
Функция возрастает при $x \in (-\infty; x_0]$
$E(y) = (-\infty; y_0]$</td></tr>
</table>

Для решения задач о расположении корней квадратного трехчлена можно сформулировать теоремы, но, однако, количество требуемых теорем будет практически необозримо. И остается только одно – научиться придумывать теорему самим каждый раз, в каждой конкретной задаче.

Для придумывания таких теорем нужно не только знание свойств квадратного трехчлена, но и умение мыслить одновременно на двух языках – алгебраическом и геометрическом. Это означает, что для любого свойства, сформулированного на алгебраическом языке, нужно уметь давать геометрическую интерпретацию на графике и наоборот. Например:

- Старший коэффициент квадратного трехчлена меньше нуля – значит, ветви параболы направлены вниз;
- Трехчлен не имеет действительных корней – значит, парабола не пересекает ось Ох и не касается ее;
- График функции $y = ax^2 + bx + c$ находится выше оси абсцисс – значит, $a > 0$ и $b^2 - 4ac < 0$ и т. д.

Прежде чем переходить к конкретным примерам, покажем методику решения задач такого типа на нескольких примерах теоретического характера.

Пусть $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – числа, $a \neq 0$.

Все рассуждения будем вести в предположении, что $a > 0$.

(Если $a < 0$, то нижеследующие рассуждения проводятся аналогично.)

Обозначим корни квадратного трехчлена через x_1 и x_2, а дискриминант – через D, $D = b^2 - 4ac$ и $x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{D}{2a}$.

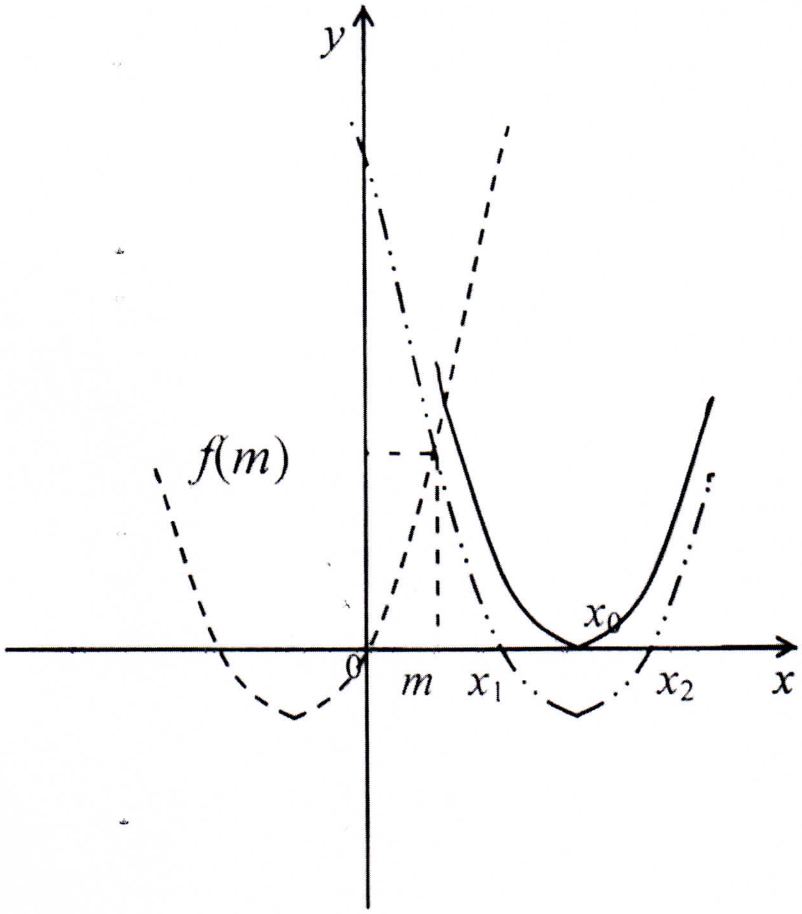
1. При каких условиях оба корня квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, необязательно различные, больше некоторого данного числа m?

Чтобы сформулировать требуемые условия, нарисуем график функции $y = f(x)$, удовлетворяющий данному требованию.

Во-первых, он пересекает ось абсцисс или касается ее – $D \geq 0$ (уравнение имеет корни);

во-вторых, $f(m) > 0$;

в-третьих, т.к. квадратный трехчлен, график которого изображен на рисунке пунктиром, также обладает этими свойствами, то необходимо указать, что условию задачи удовлетворяет парабола, абсцисса вершины которой лежит правее точки m, т.е. $-\frac{b}{2a} > m$.



Тем самым мы нашли требуемые условия: оба корня больше m в том и только том случае, когда

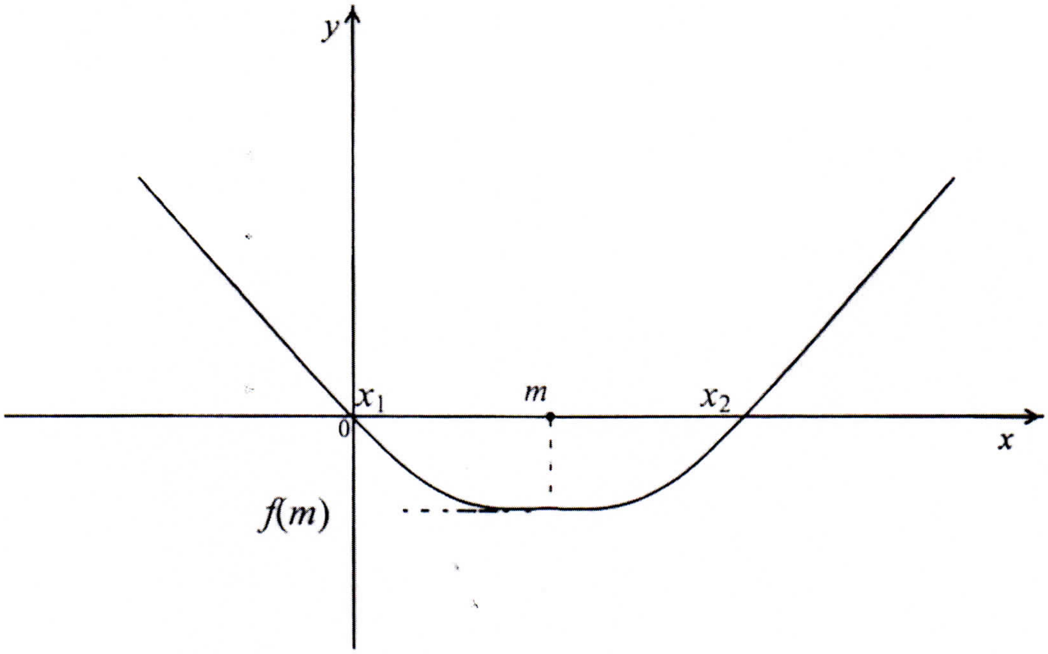
$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(m) > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > m. \end{cases}$$

Можно провести доказательство полученных условий.

2. При каких условиях корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ лежат по разные стороны от числа m?

Эту задачи можно переформулировать следующим образом: при таких условиях число m лежит между корнями уравнения?

График функции $y = ax^2 + bx + c$, удовлетворяющей данному условию, для случая $a > 0$ изображен на рисунке.

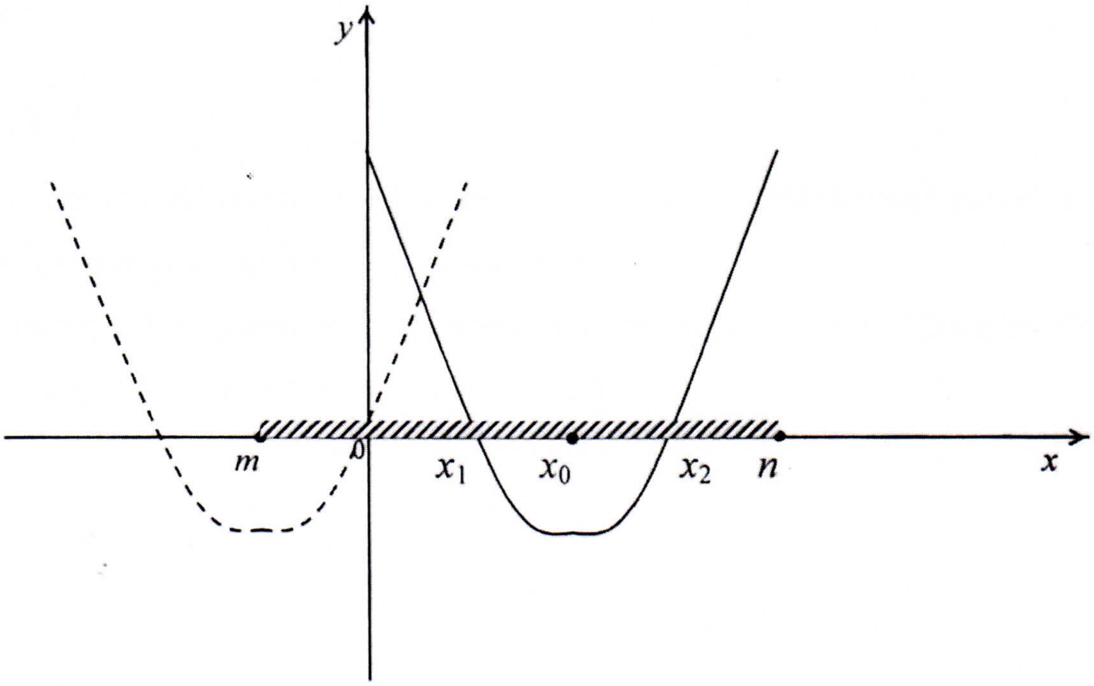


Откуда получаем неравенство f(m) < 0, требуемое условие равносильно системе:

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(m) < 0. \end{cases}$$

3. При каких условиях два (не обязательно различных) корня квадратного уравнения лежат в интервале (m; n)?

Графики квадратных трехчленов, удовлетворяющих требуемым условиям, для случая $a > 0$ изображены на рисунке.

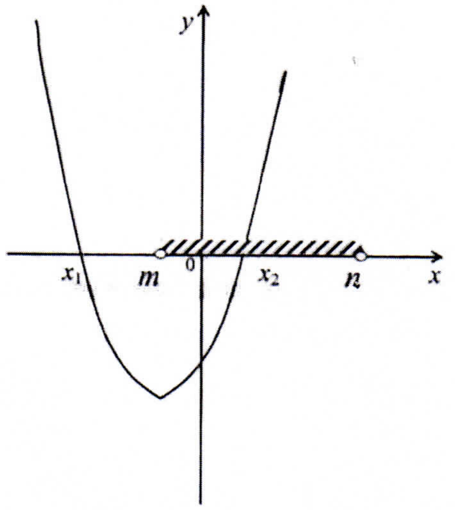


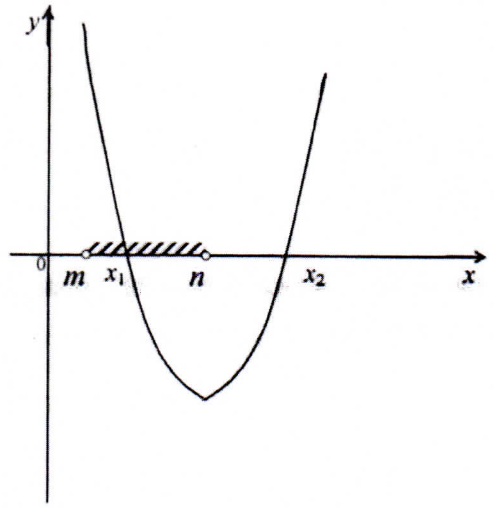
Нетрудно получить, что оба корня (различные или нет) лежат в интервале $(m; n)$, если $a > 0$, в том и только том случае, когда

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(m) > 0, \\ f(n) > 0, \\ m < x_0 < n. \end{cases}$$

4. При каких условиях ровно один корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, имеющего различные корни, лежит в интервале $(m; n)$?

Графики квадратных трехчленов, удовлетворяющих данному требованию, для случая $a > 0$, изображены на рисунках.



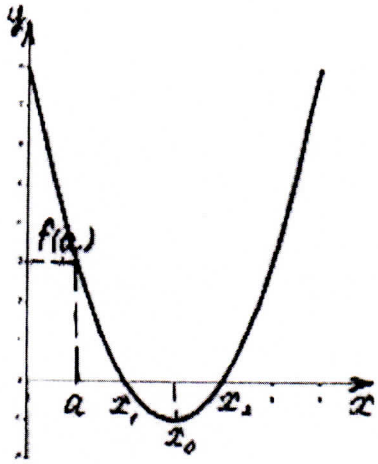


$$\begin{cases} D > 0, \\ f(m) < 0, \\ f(m) > 0. \end{cases} \quad (1) \qquad\qquad \begin{cases} D > 0, \\ f(m) > 0, \\ f(n) < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Очевидно, если $f(m) < 0, f(n) > 0$, то в рассматриваемом интервале лежит больший корень, а если $f(m) > 0, f(n) < 0$ – то меньший корень. Если же для решения задачи эти два случая различать не нужно, то требуемое условие – $f(m) \cdot f(n) < 0$.

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(m) \cdot f(n) < 0. \end{cases}$$

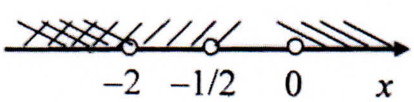
Пример 1. Найти все значения а, при которых корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ действительные, различные и оба больше a.



Решение.

Дадим геометрическую интерпретацию поставленной задачи. Очевидно, если $f(a) > 0$, $x_0 > a$ и $D > 0$, где $f(x) = x^2 + x + a$, то оба корня действительны, различны и оба больше а. Запишем эти условия системой неравенств:

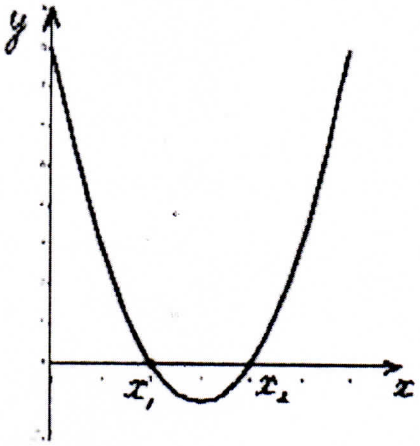
$$\begin{cases} a^2 + a + a > 0, \\ -\dfrac{1}{2} > a, \\ 1 - 4a > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2) > 0, \\ a < -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

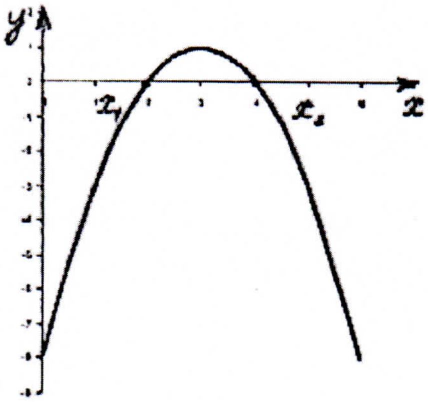


Решив систему неравенств методом интервалов, получим $a \in (-\infty;-2)$

Ответ. $(-\infty;-2)$.

Пример 2. Найти все значения а, при которых корни квадратного уравнения $ax^2 + 2(a + 3)x + a + 2 = 0$ неотрицательны.



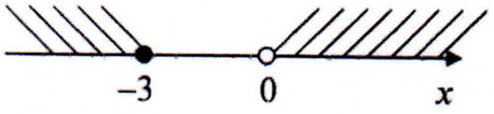


Решение.

Так как уравнение квадратное, то $a \neq 0$. Возможны два случая.

1) $\boldsymbol{a > 0}$. Корни уравнения будут неотрицательны тогда и только тогда, когда $D \geq 0$, $x_0 \geq 0$, $f(0) \geq 0$, где $f(x) = ax^2 + 2(a+3)x + a + 2$; т.о. имеем систему неравенств

$$\begin{cases} a > 0, \\ (a+3)^2 - a(a+2) \geq 0, \\ a + 2 \geq 0, \\ \dfrac{-a-3}{a} \geq 0. \end{cases},$$

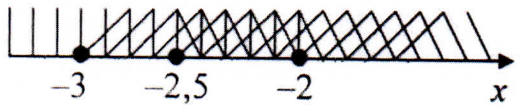


которую решаем методом интервалов. Решением системы является пустое множество.

2) $\boldsymbol{a < 0}$.

Аналогично имеем систему:

$$\begin{cases} a < 0, \\ (a+3)^2 - a(a+2) \geq 0, \\ a + 2 \leq 0, \\ \dfrac{-a-3}{a} \geq 0. \end{cases},$$



которая имеет решение, $a \in [-2{,}25; -2]$.

Ответ. $[-2{,}25; -2]$.

2. Применение графических иллюстраций при решении уравнений и неравенств с параметрами

Так преодолевается первый рубеж, учащиеся понимают, как решаются задачи о расположении корней квадратного трехчлена. В это время мы на школьных уроках переходим к изучению показательной функции, начинаем решать показательные уравнения и неравенства. На одном из заключительных уроков по этой теме я предлагаю **задачу:**

Задача 1. При каких значениях параметра <u>a</u> уравнение

$2(a^2+1)4^x + 4a^2 : 2^x + 1 = 0$ (1) не имеет решений?

Решение.

Введем замену $2^x = t$, где $t > 0$, тогда $4^x = (2^x)^2 = t^2$.

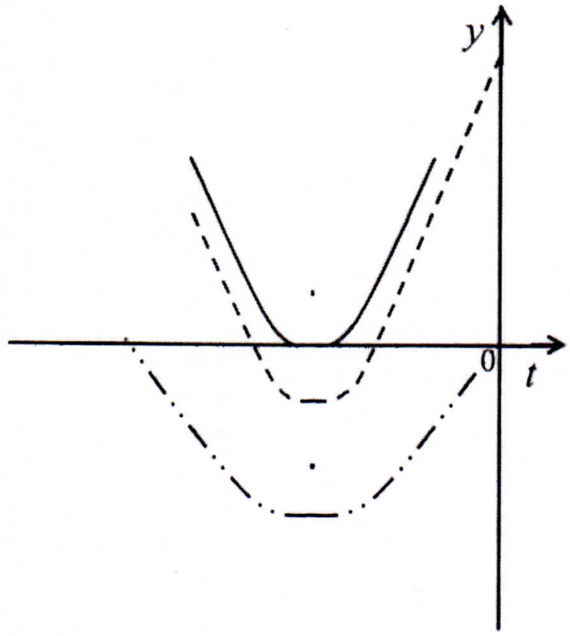
И уравнение примет вид $2(a^2+1)t^2 + 4a^2t + 1 = 0$.

Условие задачи можно *переформулировать* так: *при каких значениях параметра* $\underline{a}$ *уравнение* $2(a^2+1)t^2 + 4a^2t + 1 = 0$ (2) не имеет *положительных* решений?

Очевидно, что уравнение (2) является квадратным относительно t, т.к. $a^2 + 1 \neq 0$ ни при каком значении a. Квадратное уравнение (2) **не имеет** положительных решений в **двух случаях**:

а) Уравнение (2) вообще не имеет корней, что выполняется при $D < 0$ (условие δ)

б) Уравнение (2) имеет корни, необязательно различные, но оба корня неположительны, что выполняется при условиях (β):



(β) $\begin{cases} D \geq 0, \\ t_0 \leq 0, \\ f(0) \geq 0. \end{cases}$, где $f(t) = 2(a^2+1)t^2 + 4a^2t + 1$.

Вычислим:

$D = (4a^2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 + 1)1 = 16a^4 - 8(a^2 + 1) = 8(2a^4 - a^2 - 1) = 16\left(a^2 - 1\right)\left(a^2 + \frac{1}{2}\right);$

$$t_0 = \frac{-4a^2}{2} \cdot 2\left(a^2 + 1\right) = \frac{-a^2}{a^2 + 1}$$

$f(0) = 1$

Таким образом, условие (δ): $16(a^2 - 1)(a^2 + 1/2) < 0 \Leftrightarrow a^2 - 1 < 0,$

$(a + 1)(a - 1) < 0,$

$a \in (-1;\ 1)$, значит,

при $a \in (-1;\ 1)$ уравнение (2), а, значит, и уравнение (1) корней не имеет.

Условия (β):

$$\begin{cases} 16(a-1)\left(a^2 + \frac{1}{2}\right) \geq 0, \\ \frac{-\left(a^2\right)}{a^2 + 1} \leq 0, \\ 1 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 1 \geq 0, \\ \frac{a^2}{a^2 + 1} \geq 0, \\ a \in R. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)(a-1) \geq 0, \\ a \in R. \end{cases}.$$

$a \in (-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$

При выполнении условий (β) квадратное уравнение (2) имеет корни, но оба они не являются положительными, значит, уравнение (1) корней иметь не будет.

Объединяя результаты решений систем (δ) и (β), получим $a \in R$, т.е., при любом $a \in (-\infty;+\infty)$ данное уравнение решений не имеет.

Ответ. $(-\infty;+\infty)$

Замечание. Безусловно, задача (случай (β)) может быть решена значительно короче, если исследовать корни квадратного уравнения (2) по теореме Виета: пусть $D \geq 0$ и t_1 и t_2 – корни квадратного уравнения (2), тогда

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = \dfrac{-4a^2}{2(a^2+1)}, \\ t_1 \cdot t_2 = \dfrac{1}{2(a^2+1)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = \dfrac{-2a^2}{a^2+1}, \\ t_1 \cdot t_2 = \dfrac{1}{2} : (a^2+1) \end{cases}$$

Очевидно, $t_1 \cdot t_2 > 0$, значит, корни одного знака $t_1 + t_2 < 0$, значит, оба корня отрицательны при $D \geq 0$, т.е. при

$$16(a^2-1)\left(a^2+\frac{1}{2}\right) \geq 0,$$

$a^2 - 1 \geq 0$,

$(a + 1)(a - 1) \geq 0$.

$a \in (-\infty;-1] \cup [1; +\infty)$.

Через небольшой промежуток времени, при изучении темы «Тригонометрические уравнения» я предлагаю другую **задачу**.

Задача 2. При каких действительных значениях параметра $\underline{a}$ уравнение $2(a^2 + 1)cos^2x + 4a^2 \cdot cos\ x + 1 = 0$ не имеет решений?

Решение:

$2(a^2 + 1)cos^2x + 4a^2 \cdot cos\ x + 1 = 0$ (1)

Обозначим $cos\ x = t$, где $|t| \leq 1$.

Уравнение примет вид:

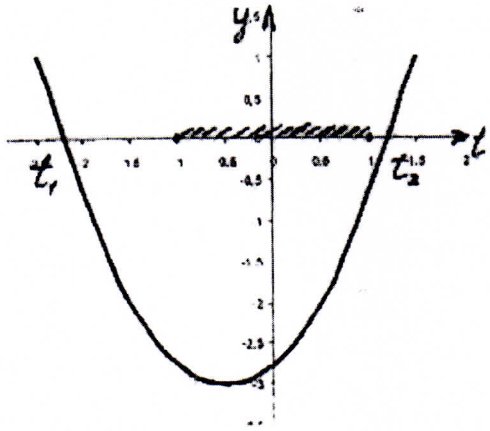
$2(a^2 + 1)t^2 + 4a^2 t + 1 = 0$ (2) – квадратное уравнение относительно t.

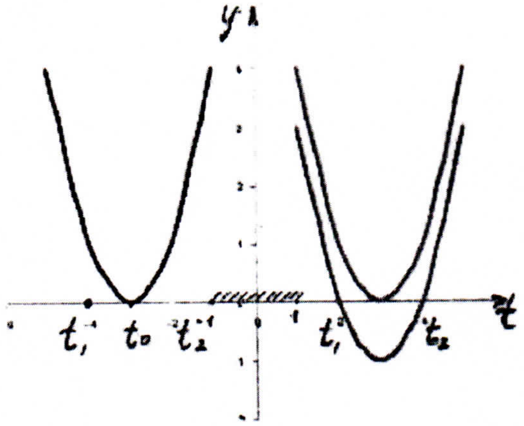
Переформулируем условие задачи: *при каких действительных значениях параметра* $\underline{a}$ *уравнение* (2) *не имеет корней из промежутка* [–1; 1]*?*

Очевидно, условие задачи выполняется **в двух случаях:**

а) квадратное уравнение (2) вообще не имеет корней при $D < 0$ ***(а)***

б) квадратное уравнение (2) имеет корни, но ни один из них не входит в промежуток [–1; 1]. Это возможно, если:





(β) $\begin{cases} D > 0, \\ f(0) < 0, \\ f(-1) < 0, \\ f(1) < 0. \end{cases}$ (γ) $\begin{cases} D \geq 0, \\ t_0 < -1, \\ f(-1) > 0. \end{cases}$ или (θ) $\begin{cases} F \geq 0, \\ t_0 > 0, \\ f(1) > 0. \end{cases}$

где $f(t) = 2(a^2 + 1)t^2 + 4a^2 t + 1$

Вычислим:

$$D = (4a^2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 + 1)1 = 16(a^2 - 1)\left(a^2 + \frac{1}{2}\right);$$

$f(0) = 1.$

$$t_0 = \frac{-a^2}{a^2 + 1}.$$

$f(1) = 2(a^2 + 1) + 4a^2 + 1 = 6a^2 + 3 = 3(2a^2 + 1)$

$$f(-1) = 2(a^2 + 1) - 4a^2 + 1 = -2a^2 + 3 = -2\left(a^2 - \frac{3}{2}\right);$$

Решим системы:

(β) $\begin{cases} 16(a^2 - 1)\left(a^2 + \frac{1}{2}\right) > 0, \\ 1 < 0, \\ 3(2a^2 + 1) < 0, \\ -2\left(a^2 - \frac{3}{2}\right) < 0. \end{cases}$ – система несовместна.

$$(\gamma)\ \begin{cases} 16\left(a^2-1\right)\left(a^2+\dfrac{1}{2}\right)\ge 0, \\ 1<0, \\ \dfrac{-a^2}{a^2+1}<-1, \\ -2\left(a^2-\dfrac{3}{2}\right)>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2\ge 0, \\ \dfrac{a^2}{a^2+1}>1, \\ a^2-\dfrac{3}{2}<0. \end{cases}$$ – система несовместна.

$$(\theta)\ \begin{cases} 16\left(a_2-1\right)\left(a^2+\dfrac{1}{2}\right)\ge 0, \\ \dfrac{-a^2}{a^2+1}>1, \\ 3\left(2a^2+1\right)>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-1\ge 0, \\ \dfrac{a^2}{a^2+1}<-1, \\ a\in R. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)(a-1)\ge 0, \\ a^2<-a^2-1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)(a-1)\ge 0, \\ 2a^2+1<0. \end{cases}$$ – система несовместна.

Значит, случай б) – квадратное уравнение (2) имеет корни, но они не входят в промежуток $[-1;\ 1]$, невозможен.

Случай а) возможен при $D<0$, т.е. при $16(a^2-1)\left(a^2+\dfrac{1}{2}\right)<0$,

$(a+1)(a-1)<0$, $a\in(-1;\ 1)$.

Уравнение (2) не имеет корней при $a\in(-1;\ 1)$, значит, и уравнение (1) не имеет корней при $a\in(-1;\ 1)$.

Ответ: $(-1;\ 1)$.

Надеюсь, от вашего внимательного взгляда не ускользнуло, что после замены переменной в двух последних задачах мы работали с одним и тем же квадратным уравнением, только на переменную t были наложены различные условия. Приведенные выше примеры показывают, как важно уметь заметить «скрытую» в задаче квадратичную функцию. Это прием достаточно распространенный и в немалой степени эффективный.

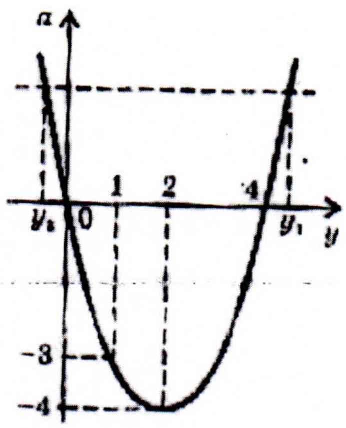
Как правило, показательные и логарифмические уравнения с помощью тождественных преобразований и замен приводятся к алгебраическим уравнениям первой или второй степени с параметрами, решение которых достаточно подробно рассмотрено ранее.

Задача 3. Решить уравнение $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$ (1).

Решение.

$3^{-2|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0.$

Обозначим: $3^{-|x-2|} = y$, где $0 < y \le 1$; т.к. $3^{-|x-2|} = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|}$ и $|x-2| \ge 0$ при любом $x \in R$, тогда $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|} \le 1$, получим уравнение $y^2 - 4y - a = 0$ (2) или $y^2 - 4y = a$.



Переформулируем условие задачи: найдем a, при которых корни уравнения (2) удовлетворяют условиям $0 < y \le 1$.

Корни уравнения (2) $y = 2 \pm \sqrt{4+a}$.

Получим систему:

$$\begin{cases} y = 2 \pm \sqrt{4+a}, \\ 0 < y \le 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \sqrt{4+a}, \\ 0 < y \le 1. \end{cases} \Leftrightarrow 0 < 2 - \sqrt{4+a} \le 1.$$

$-2 < -\sqrt{4+a} \le -1.$

$1 \le \sqrt{4+a} < 2$

$1 \le a + 4 < 4$

$-3 \le a < 0$, тогда, т.к. $y = 3^{-|x-2|}$, то по определению логарифма

$-|x-2| = log_3 y$,

$|x-2| = -log_3 y$.

$$\left[\begin{array}{l} x-2=-log_3 y, \\ x-2=log_3 y. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2-log_3 y, \\ x=2+log_3 y. \end{array}\right.$$

где $y = 2-\sqrt{4+a}$.

Таким образом, $x = 2 \pm log_3(2-\sqrt{4+a})$ при $a \in [-3; 0)$.

Ответ: при а $\in [-3; 0)$ $x = 2 \pm log_3(2-\sqrt{4+a})$.

Задача 4. При всех значениях параметра a решить уравнение

$25^x - (a-1)\cdot 5^x + 2a + 3 = 0$ и указать, при каких а оно имеет единственное решение.

Решение.

Пусть $y = 5^x$, $y > 0$. Тогда уравнение примет вид:

$$y^2-(a-1)y+2a+3=0 \Leftrightarrow y=\frac{a-1\pm\sqrt{a^2-10a-11}}{2}.$$

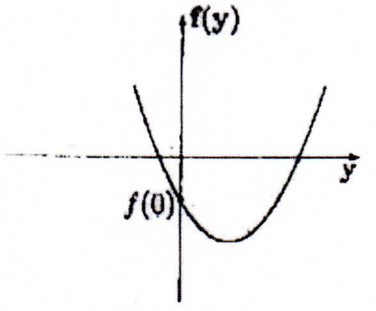
Пусть $f(y) = y^2-(a-1)y+2a+3 = 0$

Рассмотрим два случая:

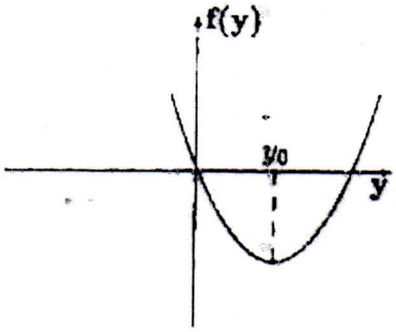
1) Больший из указанных корней положителен, а меньший не положителен. Возможны два варианта:

а) Корни имеют разные знаки. Это утверждение эквивалентно условию

$$\begin{cases} f(0)<0, \\ 2a+3<0, \\ a<-\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$



б) Меньший корень равен нулю, а больший положителен.



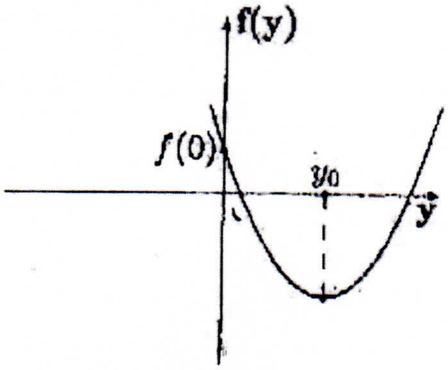
$$\begin{cases} f(0)=0, \\ y_0>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{a-1}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{нет решений.}$$

Таким образом, при а $< -\frac{3}{2}$ имеется единственный положительный корень

$$y=\frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2} \Leftrightarrow x=log_5\frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}.$$

2) Оба корня квадратного уравнения положительны, что эквивалентно выполнению условий

$$\begin{cases} D\geq 0, \\ f(0)>0, \\ y_0>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-10a-11\geq 0, \\ 2a+3>0, \\ \dfrac{a-1}{2}>0. \end{cases} \Leftrightarrow a\geq 11.$$



В этом случае существуют два решения исходного уравнения:

$$x=log_5\frac{a-1\pm\sqrt{a^2-10a-11}}{2}.$$

При этом, если дискриминант квадратного уравнения равен нулю (a = 11), эти решения совпадают.

Ответ: Если а $< -\frac{3}{2}$, то $x = log_5 \frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$;

если $-\frac{3}{2} \le a < 11$, то нет решений;

если а = 11, то х = 11;

если а > 11, то $x = log_5 \frac{a-1 \pm \sqrt{a^2-10a-11}}{2}$.

Решение единственно при а $\in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \{11\}$.

3. Экзаменационные задачи с параметрами

При работе над этой статьей я пользовалась большим количеством учебников, справочников, методическими изданиями (смотри список литературы). Сейчас, завершая свою работу, (на самом деле, это лишь небольшая остановка для подведения промежуточных результатов) я хочу предложить вниманию читателя несколько задач из «Сборника заданий для подготовки и проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы 11 класс» (Дорофеев Г.В., Муравин Г.К., Седова Е.А. – М.: Дрофа, 2005)

Задача 6.226. Найдите, при каких значениях a уравнение $log_2(4^x - a) = x$ имеет единственный корень.

Решение.

$log_2(4^x - a) = x$ (1)

По определению логарифма

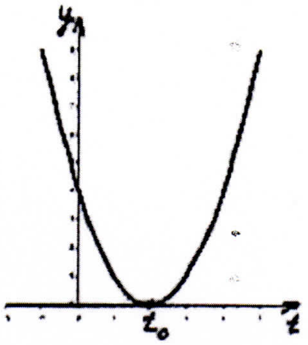
$4^x - a = 2^x$,

$4^x - 2^x - a = 0$.

Обозначим $2^x = t$, $t > 0$, тогда $t^2 - t - a = 0$ (2) и рассмотрим функцию $y= t^2 - t - a$.

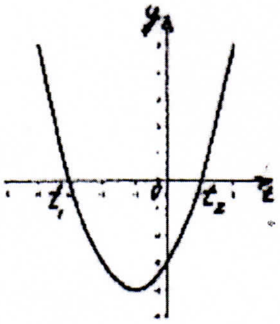
Уравнение (1) имеет единственный корень, если:

а) уравнение (2) имеет единственный положительный корень



$$(1)\ \begin{cases} t_0 > 0, \\ f(0) > 0, \\ D = 0. \end{cases}$$

б) уравнение (2) имеет различные корни, ровно один из которых положительный



$$(2)\ \begin{cases} D > 0, \\ f(0) < 0. \end{cases}$$

Вычислим

$D = 1 + 4a;$

$t_0 = \frac{1}{2};$

$f(0) = -a.$

Система (1) $\begin{cases} 1 + 4a = 0, \\ \frac{1}{2} > 0, \\ -a > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4}, \\ a \in R, \\ a < 0. \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}.$

Система (2) $\begin{cases} 1 + 4a > 0, \\ f(0) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -\frac{1}{4}, \\ -a < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{1}{4}, \\ a > 0. \end{cases}$

$a \in (0;+\infty).$

Объединив полученные решения, получим: $a \in \left\{-\frac{1}{4}\right\} \cup (0;+\infty)$.

Ответ. $(0; +\infty) \cup \left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

При работе над данной статьей я даже представить себе не могла, какой обширный и благодатный материал для работы дадут мне задания части С из ЕГЭ – 2007. Я предлагаю вашему вниманию решения заданий С3 (варианты № 68, № 66), выполненные по только что рассмотренной методике.

Задание С3 (ЕГЭ – 2007, вариант 68). Найдите все значения а, для которых при каждом x из промежутка [2; 8) значение выражения $log_2^2 x - 5$ не равно значению выражения $(a-1)log_2x$.

Решение.

Условие задачи имеет вид:

$$(\acute{\alpha})\ \begin{cases} log_2^2 x - 5 \neq (a-1)log_2 x, \\ x \in [2;\ 8) \end{cases}$$

Обозначим $log_2x = t$, тогда из условия $2 \leq x < 8$ в силу монотонности функции log_2x получим

$log_2 2 \leq log_2 x < log_2 8$

$1 \leq t < 3$.

Система $(\acute{\alpha})$ запишется в виде:

$$(\beta)\ \begin{cases} t^2 - 5 \neq (a-1)t, \\ t \in [1;\ 3) \end{cases}$$

Переформулируем условие задачи: при каких значениях a уравнение (*) $t^2 - (a-1)t - 5 = 0$ не имеет корней на промежутке [1; 3)?

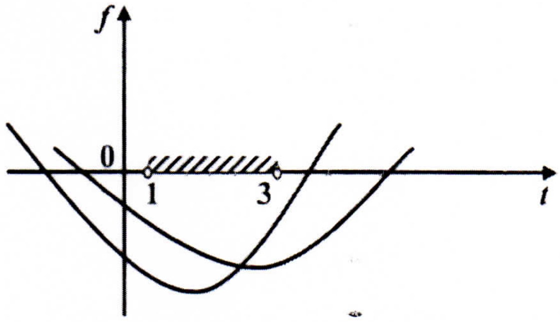
Вычислим $D = (a-1)^2 + 20$; $D > 0$ при $\forall\ a \in R$, значит, уравнение (*) имеет два различных корня.

Для выполнения условий (β) необходимо и достаточно, чтобы оба корня уравнения (*) не принадлежали промежутку [1; 3).

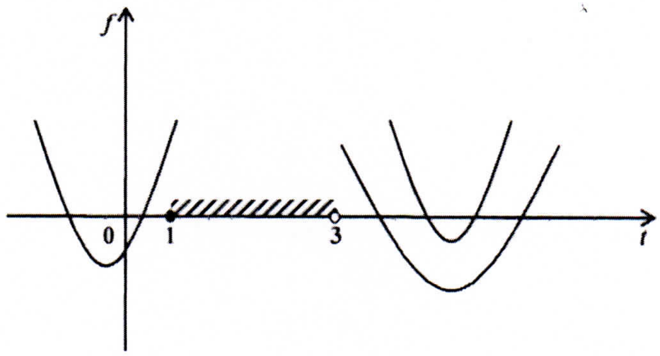
Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 - (a-1)t - 5$.

Ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Выполним графические иллюстрации к системе (β) и запишем условия, при которых представленные ситуации выполняются:



$$(1)\ \begin{cases} D > 0, \\ f(1) < 0, \\ f(3) \le 0. \end{cases}$$



$$(2)\ \begin{cases} D > 0, \\ f(1) > 0, \\ t_0 < 1. \end{cases} \text{ или } (3)\ \begin{cases} D > 0, \\ f(3) \ge 0, \\ t_0 > 3. \end{cases}$$

Вычислим: $f(1) = 1 - (a - 1) - 5 = -a - 3$.

$f(3) = 9 - 3(a - 1) - 5 = -3a + 7$.

$t_0 = \dfrac{a-1}{2}$.

Система (1): $\begin{cases} (a-1)^2 + 20 > 0, \\ -a - 3 < 0, \\ -3a + 7 \le 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R, \\ a > -3, \\ a \ge \dfrac{7}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow a \ge \dfrac{7}{3}$.

Система (2): $\begin{cases} (a-1)^2 + 20 > 0, \\ -3a + 7 \ge 0, \\ \dfrac{a-1}{2} > 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in R, \\ a \le \dfrac{7}{3}, \\ a > 7. \end{cases}$ – система несовместна

Система (3): $\begin{cases} (a-1)^2+20>0, \\ -a-3>0, \\ \dfrac{a-1}{2}<1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in R, \\ a<-3, \\ a<3. \end{cases} \Leftrightarrow a<-3.$

Объединим полученные решения: $a \in (-\infty;\ -3) \cup \left[\frac{7}{3};\ +\infty\right)$.

Ответ. $(-\infty;\ -3) \cup \left[\frac{7}{3};\ +\infty\right)$.

Задание С3 (ЕГЭ – 2007, вариант 66). Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка (3; 9] значение выражения $log_3^2 + 3log_3 x$ не равно значению выражения $9 + alog_3x$.

Решение.

Условия задачи можно записать в виде: найти значения параметра а, для которых выполняется равенство: $log_3^2 + 3log_3 x = 9 + alog_3x$ для $x \in (3;\ 9]$ и исключить эти значения из множества $(-\infty;\ +\infty)$.

Запишем систему:

$$\begin{cases} log_3^2 + (3-a)log_3 x - 9 = 0, \\ x\in(3;\ 9] \end{cases} \quad (\acute{\alpha})$$

Найдем, при каких a уравнение из системы ($\acute{\alpha}$) имеет решения в промежутке (3;9]

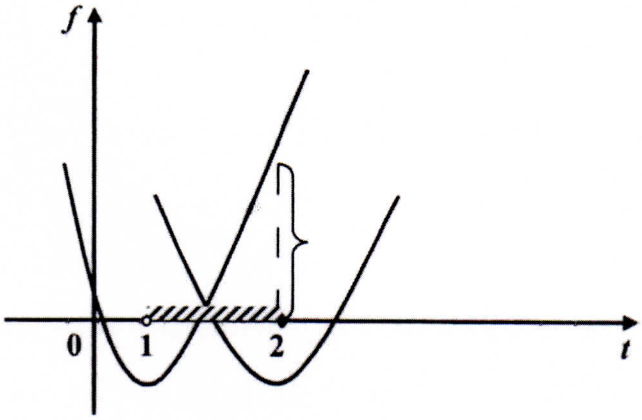
Обозначим $log_3x = t$. Т.к. $3 < x \le 9$, функция log_3x – возрастающая, то $log_3 3 < log_3 x \le log_3 9$,

$1 < t \le 2$.

Система ($\acute{\alpha}$) примет вид: (*) $\begin{cases} t^2+(3-a)t-9=0, \\ 1<t\le 2. \end{cases}$

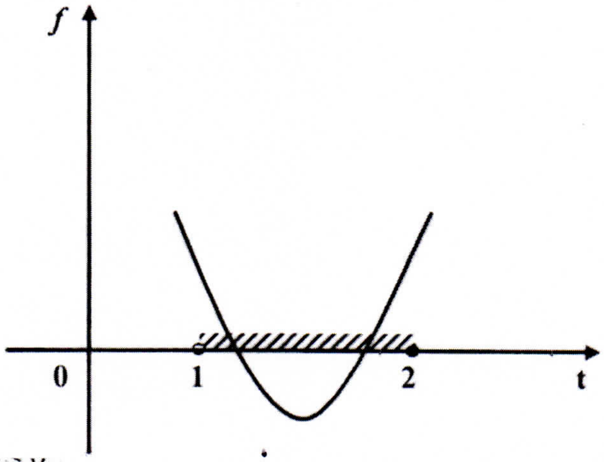
Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 + (3-a)t - 9$ и узнаем, при каких a хотя бы один нуль функции попадает в промежуток (1; 2].

Сделаем графические иллюстрации. В промежуток (1; 2] попадает ровно один нуль функции f(t), если выполняются условия



(1) $\begin{cases} f(1) < 0, \\ f(2) \geq 0. \end{cases}$ или (2) $\begin{cases} f(1) > 0, \\ f(2) \leq 0. \end{cases}$

В промежуток (1; 2] попадут оба нуля функции f(t)= t^2+(3-a)t-9,



если (3) $\begin{cases} f(1) > 0, \\ f(2) \geq 0, \\ 1 \leq t_0 \leq 3, \text{ где } t_0 = \dfrac{a-3}{2}. \end{cases}$

Вычислим:

$D = (3 - a)^2 + 36$ – дискриминант квадратного трехчлена $t^2 + (3 - a)t - 9$;

Очевидно $D > 0$, значит, график функции $f(t) = t^2 + (3 - a)t - 9$ пересекает ось Ot в двух различных точках

$f(1) = 1 + 3 - a - 9 = -a - 5;$

$f(2) = 4 + 6 - 2a - 9 = 1 - 2a;$

$t_0 = \dfrac{a-3}{2}.$

<>

Система (1): $\begin{cases} -a-5<0, \\ 1-2a \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>5, \\ a \le \frac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow -5 < a \le \frac{1}{2}.$

Система (2): $\begin{cases} -a-5>0, \\ 1-2a \le 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-5 \\ a \ge \frac{1}{2} \end{cases}$ – нет решения.

Система (3): $\begin{cases} -a-5>0, \\ 1-2a \ge 0, \\ 1 \le (a-3)2 \le 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-5, \\ a \le \frac{1}{2}, \\ 5 \le a \le 7. \end{cases}$ – система несовместна.

Т.о. система уравнений (*) имеет решение при $a \in \left(-5; \ \frac{1}{2}\right]$.

Значит, и уравнение из системы (ά) имеет решение на (3; 9] при $a \in \left(-5; \ \frac{1}{2}\right]$.

Т.о., исходное уравнение не имеет решений на промежутке (3; 9], если $a \in (-\infty; \ -5]$, $a \in \left(\frac{1}{2}; \ +\infty\right]$.

Ответ: $(-\infty; \ -5] \cup \left(\frac{1}{2}; \ +\infty\right]$.

Уважаемые коллеги! Я хочу обратиться к вам с некоторыми мыслями, которые неоднократно приходили мне в голову при написании этой статьи.

Верно расхожее утверждение о том, что нет плохих учеников, а… Это наша вина в том, что недообъяснили, недоучили, не увлекали, просмотрели «звездочку» или будущего Лобачевского. Нашим ученикам гораздо сложнее справиться с тем океаном информации, в котором и взрослому, образованному человеку впору захлебнуться, чем нам разобраться в тонкостях своего предмета и донести его до умов и душ учеников. Безусловно, задача нелегкая, но цель стоит наших усилий.

Не принимайте на веру никакие ответы, приведенные в пособиях. Особенно будьте внимательны с книгами серии «Решебник».

В своей работе я не зря привела решения задачи № 6.226 из сборника экзаменационных заданий Г.В. Дорофеева и других. В «решебнике» к этому сборнику (Дорофеев Н.В., Сапожников А.А., Шубин Е.С. Решение экзаменационных задач по математике за 11 класс: Учебно-практическое пособие. – М.: Экзамен, 2003) приведено и неверное решение задания № 6.226, и, соответственно, выписан неправильный ответ.

Там же задачи с параметрами № 6.230, № 6.231 решены графически, но абсолютно лишены даже намеков на пояснения и обоснование ответов.

Прежде чем пробовать решать задачи с параметрами, предложите своим ученикам разобраться с теорией, выучить все основные понятия темы «Функции», научиться уверено строить и преобразовывать графики элементарных функций, потренироваться в «переводе» алгебраических утверждений на язык геометрии и обратно.

Умение «нарисовать ситуацию» либо сразу приведет вас к ответу (который желательно проверить аналитически), либо укажет «район поисков» решения или хотя бы путь, по которому стоит двигаться.

Если вы задумались о том, по какому учебнику работать с учащимися профильных классов или классов общеобразовательных, в которых многие учащиеся активно интересуются математикой, я очень советую вам воспользоваться УМК «Алгебра и начала анализа 10» и «Алгебра и начала анализа 11» авторы С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. Это учебники нового поколения серии «МГУ – школе». Учебники двухуровневые, по ним можно работать как в общеобразовательных, так и в профильных классах. Теоретический материал в них изложен понятно, доступно и наглядно. Но самое интересное в них – это главы «Нестандартные методы решения уравнений, неравенств и систем», «Уравнения, неравенства и системы с параметрами» и «Задания для повторения». Все задачи в этой главе снабжены указаниями, в каких вузах и в каком году они были предложены на вступительных экзаменах. Причем, все указанные вузы – лучшие в России. Это МГУ, СПБГУ, МАИ, МЭИ, РЭА, ВШЭ, МИРЭА, МФТИ… И когда эти задания получаются у моих учеников - это такое счастье! Это их и моя маленькая победа!

Я желаю удачи всем!

И буду очень рада, если мои размышления или решенные задачи окажутся вам полезными.

Литература

1. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2005. Серия «МГУ – школе».
2. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа: Учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2006. Серия «МГУ – школе».
3. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами. – Минск: Асар, 1996.
4. Балаян Э.Н. Репетитор по математике для поступающих в вузы. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005.
5. Говоров В.М., Дымов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике. – М.: Наука, 1986.
6. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – М.; Харьков: Илекса; Гимназия, 2003.
7. Дорофеев Г.В. и др. Сборник заданий для подготовки и проведения письменного экзамена по математике за курс средней школы. – М.: Дрофа, 2006.
8. Егерев В.К., Зайцев В.В. и др. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / Под ред. М.И. Сканави. – Минск: Высшая школа, 1990.
9. Мельников И.И., Сергеев И.Н. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. – М.: УНЦ ДО, 2004.

10. Митбрейт Ю.Б. Решаем примеры с параметрами. – СПб.: Нева-Визит, 2000.

11. Моденов В.П. Задачи с параметрами: Учебное пособие для школьников и абитуриентов. – М.: Экзамен, 2006.

12. Рурукин А.Н. Математика: Пособие для интенсивной подготовки к экзамену по математике. – М.: Вако, 2004.

13. Рязановский А.Р. Алгебра и начала анализа: 500 способов и методов решения задач по математике. – М.: Дрофа, 2001.

14. Садовничий Ю.В. Математика. Конкурсные задачи по алгебре: Учебное пособие. Ч. 1 – 5. – М.: УНЦ ДО, 2003.

15. Черкасов О., Якушев А. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. – М.: Айрис-пресс, 1999.

16. Материалы ЕГЭ, ЦТ, школьных контрольных работ.